

# 急勾配河川にCRD法を適用する場合の ドライ・ウェットの境界条件と流量誤差

A DRY-WET BOUNDARY CONDITION AND A DISCHARGE ERROR,  
WHEN THE CRD SCHEME IS APPLIED TO A STEEP GRADIENT RIVER

堀江克也<sup>1</sup>・森明巨<sup>2</sup>・西本直史<sup>3</sup>

Katsuya HORIE, Akio MORI, and Naoshi NISHIMOTO

<sup>1</sup>正会員 工修 いであ株式会社 水圏事業本部河川部 (〒154-8585 東京都世田谷区駒沢3-15-1)

<sup>2</sup>正会員 工博 いであ株式会社 水圏事業本部河川部 (〒060-0062 北海道札幌市中央区南二条西9-1-2)

<sup>3</sup>正会員 博(工) いであ株式会社 水圏事業本部 (〒154-8585 東京都世田谷区駒沢3-15-1)

Contour-integration-based residual distribution, CRD scheme is one of numerical computational methods to simulate flows with shock waves. Authors have applied the CRD scheme to the open channel flow, and shown validity as compared with the experiment-with-a-model result or the theoretical value. However, for applying to various flows, the boundary condition of dry-wet is required.

In the paper, when the CRD scheme is applied to a steep gradient river, the boundary condition of dry-wet is shown paying attention to a discharge error. And the shock capturing method of two dimensional calculation for raising applicability the CRD scheme is shown.

**Key Words :** numerical computation, contour-integration-based residual distribution, steep gradient river, dry-wet boundary, discharge error, shock capturing

## 1. はじめに

著者らは不連続解を持つ流れの多次元解析法として開発されたCRD法の研究を行っている<sup>1)2)</sup>。CRD法はMacCormack法<sup>3)</sup>のように陽的に人工粘性を加える必要がなく、Residual Distribution (RD) scheme<sup>4)5)6)</sup>のように複雑な線形化を必要としない計算法であり、二次元河床変動解析への適用が容易である。また、平面二次元計算では有限要素法のように非構造の三角形格子を用いるので複雑な地形の扱いが容易である。これまでに水理模型実験結果やダム破壊流れなどの理論値との比較によりCRD法の有効性を示し<sup>1)</sup>、急流都市河川の豊平川を対象として実河川の大規模洪水時の適合性を確認した<sup>2)</sup>。さらにCRD法を多様な場で適用するためには、平水時の流れや氾濫域の流れなど計算領域内のドライ・ウェット混在流れを扱う必要がある。ドライ・ウェットの取り扱いについては文献7)8)等)に示されているが、CRD法は三角形格子の頂点が計算点(Cell-vertex)となるため、これに対応した境界条件が必要である。

本研究では、CRD法におけるドライ・ウェットの境界条件を提案し、モデル河道において特に流量誤差の観点からその適合性を示す。加えて、一昨年の論文<sup>1)</sup>で確認された平面二次元計算における膨張衝撃波の新たな除去

法についても示し、CRD法のモデルの向上を図る。

## 2. 計算法

### (1) CRD法

CRD法の計算法を以下に示す(詳細は文献1)を参照)。二次元一階双曲型偏微分方程式を式(1)で表す。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} + \Omega = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\phi$ は保存変量、 $\mathbf{F}$ は流束である。ガウスの発散定理を使えば、式(1)は式(2)に書き換えられる(簡単のため $\Omega = 0$ とする)。

$$\int_A \frac{\partial \phi}{\partial t} dA + \Phi^T = 0 \quad (2)$$

$$\Phi^T = \int_T \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \int_{\partial T} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \quad (3)$$

ここに、 $\Phi^T$ はResidualと呼ばれる。Aは計算点の支配面積、 $\mathbf{n}$ は計算領域の境界線に外向きの垂直ベクトル、Tは計算要素(ここでは三角形)を表す。 $\Phi^T$ を式(3)に示す係数 $\beta_i^T$ に応じて、計算点iへ配分する。

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} \beta_i^T \Phi^T \quad (3)$$

ここに、nは時間ステップ、 $\sum_i \beta_i^T = 1$ である。

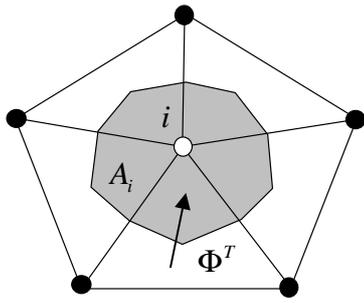


図-1 CRD法における計算点(三角形の頂点におく)

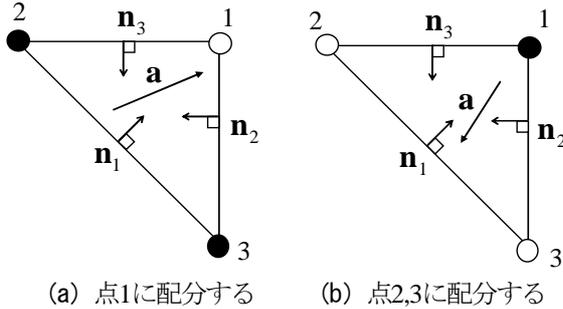


図-2 Residualの配分法-波動の伝播する  $\mathbf{a}$  の方向に配分

計算は非構造の三角形格子を用いる。計算点は三角形の頂点 (Cell-vertex) にとり (図-1), 1つの三角形格子 (計算要素) ごとに独立してResidual  $\Phi^T$  を計算する。

式(2)に左固有ベクトル  $L$  を作用させて固有ベクトル空間に変換し,  $L\Phi^T$  をInflow parameter  $k_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i / 2$  の符号が正の方向に配分する(風上スキーム)。ここに,  $\mathbf{a}$  は波動の伝播速度,  $\mathbf{n}_i$  は辺に垂直で計算要素に内向きのベクトルである。図-2(a)のように  $k_i > 0$  が1点の場合は点1に配分する。(b)のように2点に向かう場合には多くの方法が提案されているが, 本論文では  $k_i$  の比に応じて配分する(4)式の方法を用いる。得られた配分に右固有ベクトル  $R$  を作用させて元の空間に戻し,  $\Delta t$  後の保存変量  $\phi$  を算定する。

$$\text{LDA-scheme}^{4)} \begin{cases} \beta_2 = k_2 / (k_2 + k_3) \\ \beta_3 = k_3 / (k_2 + k_3) \end{cases} \quad (4)$$

## (2) 基礎方程式

平面二次元浅水流方程式は(1)式において,

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ q_u \\ q_v \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hv \\ q_u \mathbf{v} + g[h]H\mathbf{i} \\ q_v \mathbf{v} + g[h]H\mathbf{j} \end{pmatrix}, \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ fq_u \\ fq_v \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここに,  $h$  は水深,  $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ ,  $u, v$  は  $x, y$  方向の水深平均流速,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  は  $x, y$  方向の単位ベクトル,  $q_u = uh$ ,  $q_v = vh$ ,  $g$  は重力加速度,  $H$  は水位,  $f = gn^2 q / h^{7/3}$ ,  $n$  はマンニングの粗度係数,  $q$  は単位幅流量である。なお,  $[ \ ]$  は計算要素の平均を表し定数として扱う。

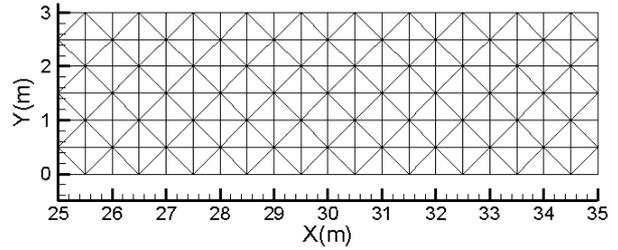


図-3 ダム破壊流れに用いた計算格子 (一部分抜粋)

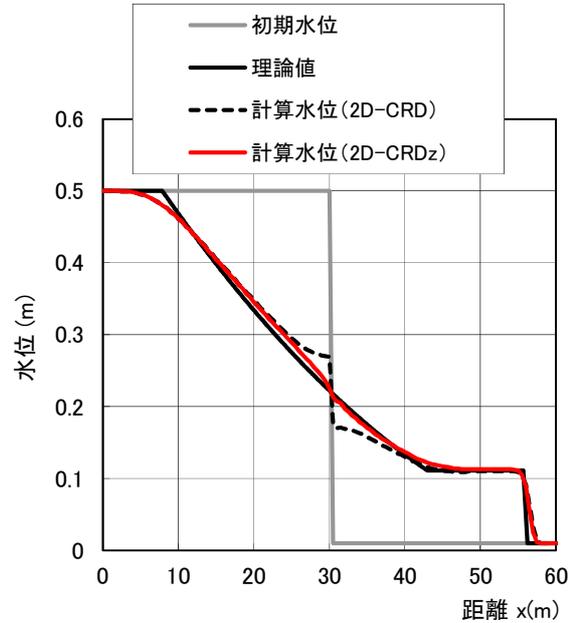


図-4 ダム破壊流れ (横断平均水位)

## (3) 抵抗項の取り扱い

水深がゼロに近く流速が速い場合, 式(5)の抵抗項が非物理的な値となるため,  $\Delta t$  後の保存変量  $\phi^{n+1}$  を算出する際に式(6)に示すように抵抗項を陰的に取り扱う。

$$\begin{pmatrix} h \\ (1+f\Delta t)q_u \\ (1+f\Delta t)q_v \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} h \\ q_u \\ q_v \end{pmatrix}^n - \frac{\Delta t}{A_i} \beta_i^T \Phi^T \quad (6)$$

## (4) 上下流端, 壁面条件

上流端及び下流端においては所定の境界値となるように式(7)により計算領域外から特性波  $\partial\omega$  を与える。壁面の計算点においては計算領域外へ向かう流速成分がゼロとなるように計算領域外から特性波  $\partial\omega$  を与える。

$$\partial\phi = R\partial\omega \quad (7)$$

## 3. Entropy Fixの効果

二次元のCRD法では, 計算点が横断方向に一直列に並び一次元的な流れとなった場合, 支配断面で膨張衝撃波を許す<sup>1)</sup>。その除去法として本論文では, 一次元CRD法におけるEntropy Fixと同様に, 流れのみの計算に流砂の連続式を加えて計算する方法 (河床変動計算の利用<sup>2)</sup>) を用いる。

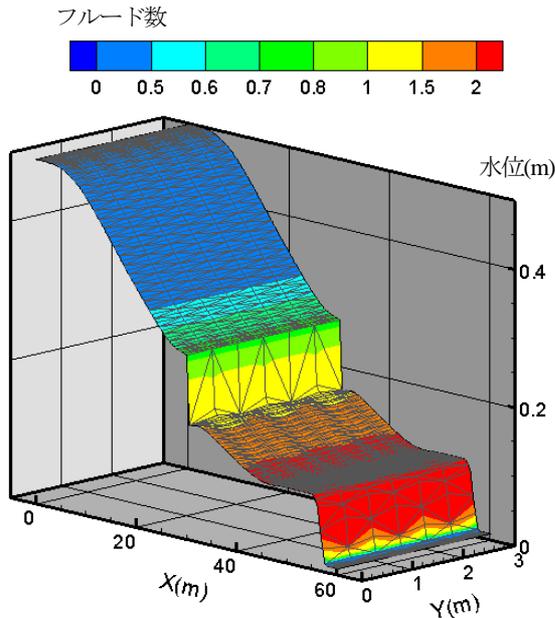


図-5 計算水位とフルード数カウンター (2D-CRD)

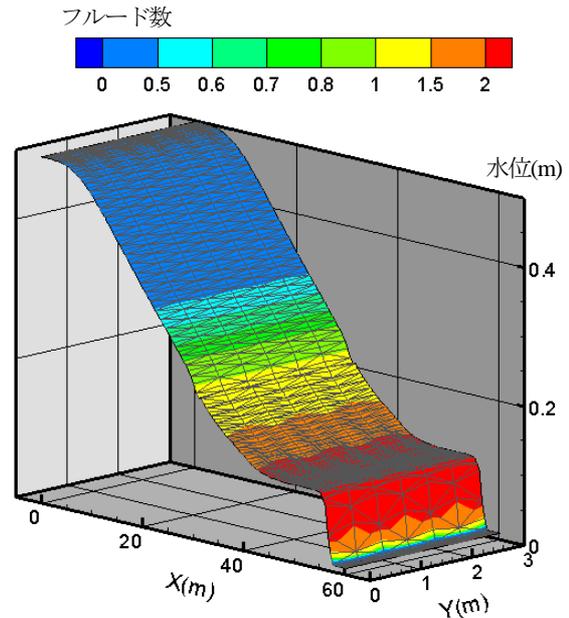


図-6 計算水位とフルード数カウンター (2D-CRDz)

ダム破壊流れを対象として、そのEntropy Fixの効果を示す。初期水位はダム部0.5m、水路部0.01m、河床高は0.0mの水平、川幅は3.0mで一定、粗度係数は0の条件とした。計算格子は $\Delta x = 0.5m$ の三角形格子であり、計算点が横断方向に一直線に並んでいる (図-3)。

図-4は計算開始から10秒後の計算結果 (横断平均水位) と理論値<sup>7)</sup>との比較である。Entropy Fixなしの二次元計算 (2D-CRD) では、 $x = 30m$ 地点で支配断面となり膨張衝撃波が現れる (図-5)。一方、河床変動計算を利用した計算 (2D-CRDz) では、フルード数 $Fr = 1$ が特異点とならずに膨張衝撃波が除去される (図-6)。

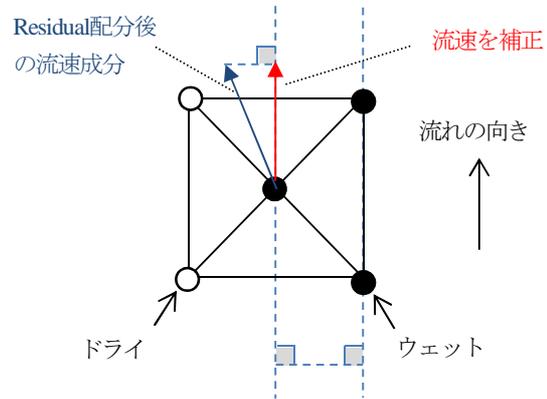


図-7 流速成分の補正の向き (平面図)

#### 4. ドライ・ウェットの境界条件と流量誤差

##### (1) 境界条件

##### a) ウェットの計算点を補正する方法

ドライとウェットの境界に位置するウェットの計算点において、ドライ領域へ向かう流速成分がゼロとなるように次の補正を行う。

① Residual  $\Phi^T$  を計算後に生じるドライ領域へ向かう流速成分を、接続するウェットの計算点の向きに補正する (図-7)。

② 特性波  $\partial\omega$  を与え補正した流速成分に対する水位を補正する (壁面条件と同様)。

また、計算を行うのは3点がウェットの領域のみとし、ドライの計算点に接続するウェットの水位が、ドライの河床高+微小水深 (ここでは水深0.001m) より大きくなると微小水深を与え計算を開始する。水位低下に対しては、計算点の水深が微小水深以下になると計算を行わず、流速成分をゼロとする。なお、ドライとウェットの境界線を $\Delta t$ ごとに探索するため計算時間は長くなる。

この方法で図-8に示す半円型の急縮流れの計算を行い、

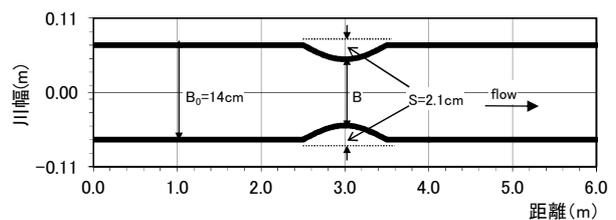


図-8 急縮流れの平面形状

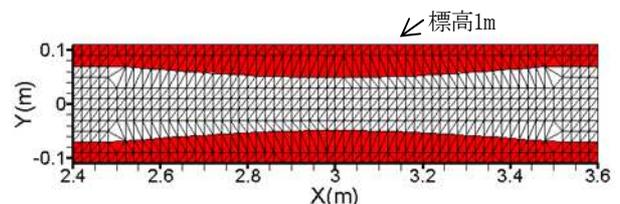


図-9 計算格子 (x=2.4m~3.6m区間を抜粋)

一次元CRD法 (1D-CRDz) との比較を行った。一次元計算の理論値との比較については文献1)を参照。計算格子は $\Delta x = 0.02m$ で川幅方向に-0.11m~0.11mまで計算領域

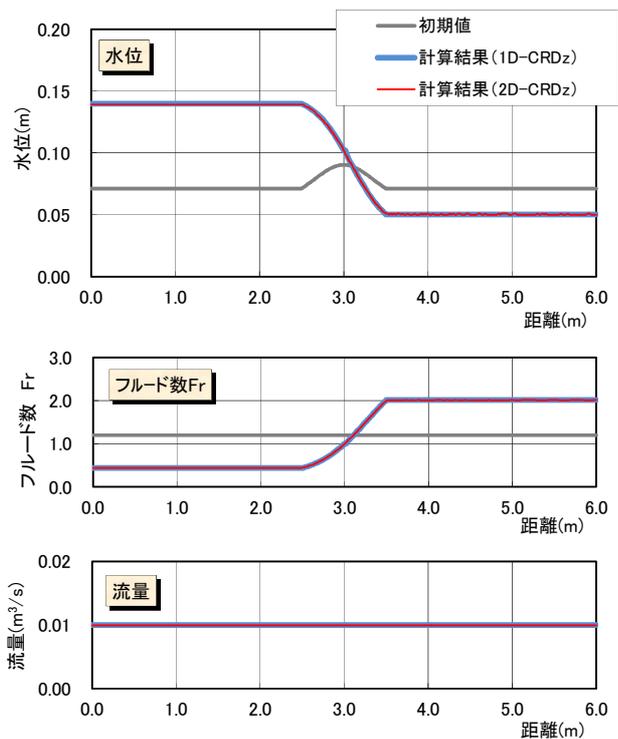


図-10 半円型の急縮流れの計算結果（横断平均）

をとりドライ・ウェットの境界に沿って計算格子を作成した（図-9）。河床は水平で水路部は0.0m，ドライ部は1.0mとし，粗度係数は0である。また，初期水位は $Fr=1.2$ とし，上流端から $0.01\text{m}^3/\text{s}$ の一定流量を与え定常解を求めた。結果結果を図-10に示すが，計算水位，フルード数，流量ともに次元計算とほぼ一致した。

b) ドライの計算点を使用する方法

ウェットに接続するドライの計算点を境界として以下のように計算を行う。

- ①本来は図-11のA点がドライとウェットの境界となるが，計算格子がないためA点の水位をB点に仮想して計算する（ウェットの点が1点の場合はその水位を他2点に与える）。
- ②ドライの計算点の流速はゼロとする。

この方法で上記の半円型の急縮流れの計算を行った。

図-12に流速ベクトル-フルード数カウンター図，図-13に計算水位，フルード数，流量の縦断図を示す。流速ベクトルは概ねドライとウェットの境界に自動的に向くようであるが，急変部（ $x=2.64\text{m}$ ,  $3.3\text{m}$ ）で流量が10%程度増減し，水位は次元計算に対して急縮部の上流側で約12%低く下流側で約11%高くなった。しかし，境界条件b)の方法は，境界線を探る必要がなくa)の方法より短時間で計算できることから，今後，流量と水位を保存できる水位や位置等を検討することが課題と考える。

(2) 流量誤差

境界条件a)の方法でより厳しい急縮急拡の条件での適合性を流量誤差の観点から確認する。

a) 計算格子に沿わない境界

ドライとウェットの境界が計算格子に沿わないモデル

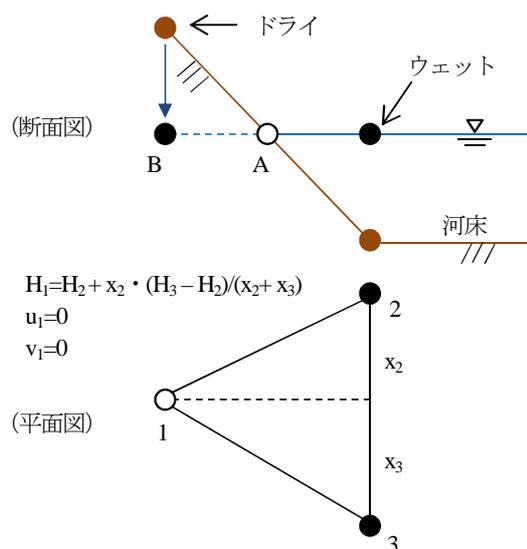


図-11 ドライの計算点を使用する方法

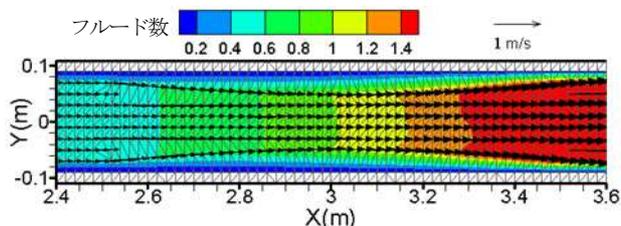


図-12 流速ベクトル-フルード数カウンター図  
( $x=2.4\text{m}\sim 3.6\text{m}$ 区間を抜粋)

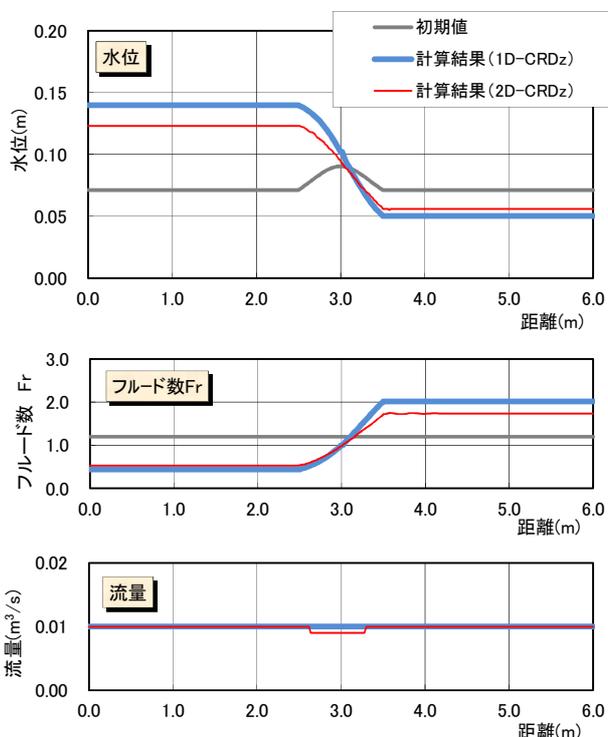


図-13 半円型の急縮流れの計算結果（横断平均）

河道の計算を行った。勾配1/100の直線水路で計算格子は $\Delta x=10.0\text{m}$ ， $x=210\sim 330\text{m}$ に水路より5.0m高い階段型の高地がある（図-14）。粗度係数は0.030である。初期水

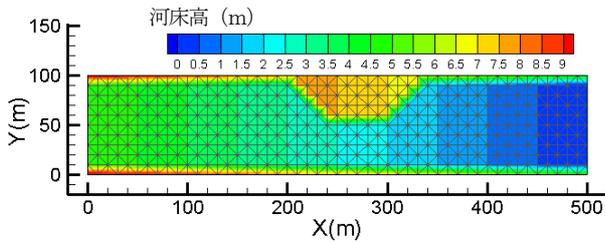


図-14 計算格子と河床高コンター図

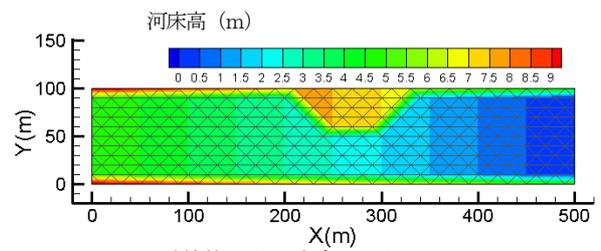


図-17 計算格子と河床高コンター図 (CASE1)

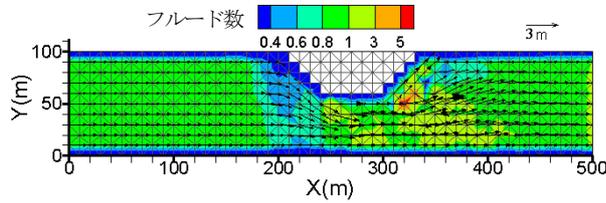


図-15 流速ベクトルフルード数コンター図

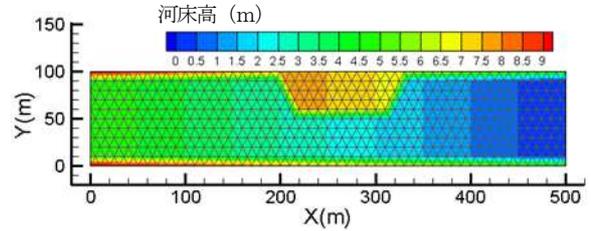


図-18 計算格子と河床高コンター図 (CASE2)

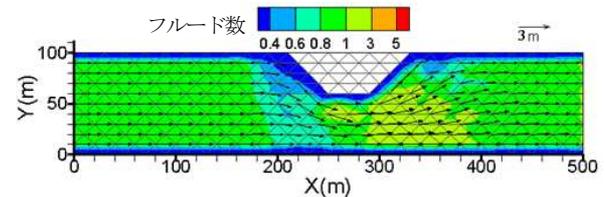


図-19 流速ベクトルフルード数コンター図 (CASE1)

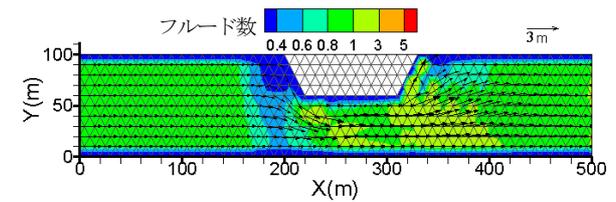


図-20 流速ベクトルフルード数コンター図 (CASE2)

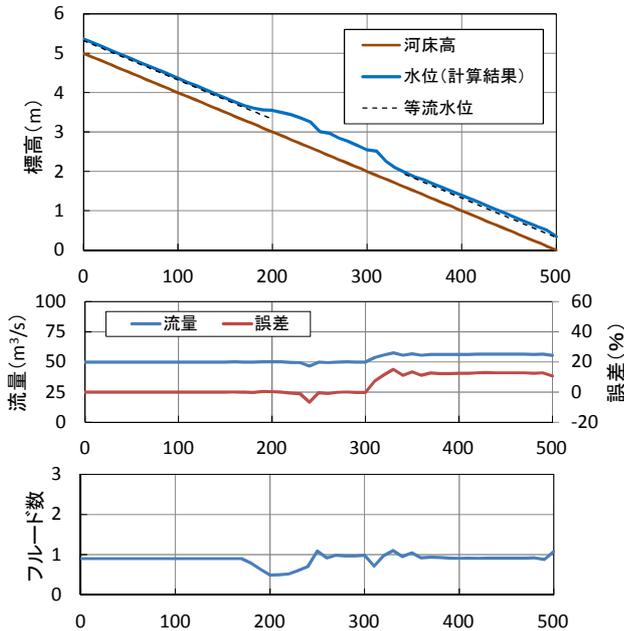


図-16 階段型の急縮流れの計算結果 (横断平均)

位は急縮部が無い場合の等流水位とし、上流端から  $50\text{m}^3/\text{s}$  の一定流量を与え計算を行った。図-15に流速ベクトル-フルード数コンター図を示す。階段型ではあるが、ドライとウェットの境界に沿って流速ベクトルが向いており、境界条件の効果が見てとれる。図-16は計算開始から1,800s後の平均水位、流量、フルード数縦断図である。  $x=300\sim 330\text{m}$  の急拡部で流量が約15%増加し、それが下流まで伝播し、下流側の水位が等流水深に対して若干高くなっている。これは、急拡部の  $(x, y) = (320, 50)$  付近で剥離が生じ  $Fr > 5$  の高流速が生じたためと考えられる。

#### b) 計算格子に沿う境界

ドライとウェットの境界が三角形格子の辺になるように図-17、図-18に示すX型の計算格子を作成した。計算は急縮急拡の角度が  $a$  ) と同様の  $45^\circ$  となる場合 (CASE1) と  $60^\circ$  となる場合 (CASE2) の2ケースを行った。図-19、図-20に流速ベクトル-フルード数コンター

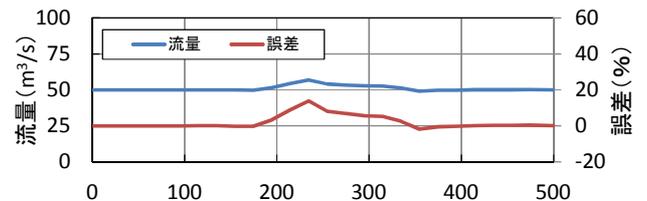


図-21 流量と誤差率の縦断図 (CASE1)

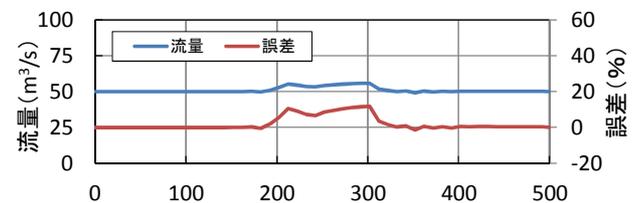


図-22 流量と誤差率の縦断図 (CASE2)

図を示す。CASE1とCASE2ともに急拡部での高流速が発生せずに、滑らかな流れとなった。図-21、図-22に流量と誤差率の縦断図を示すが、急縮部で流量誤差が約15%程度生じるものの急拡部の下流では流量増の影響が伝播せずに流量誤差はほとんどなくなった。

#### c) 細かい計算格子の場合

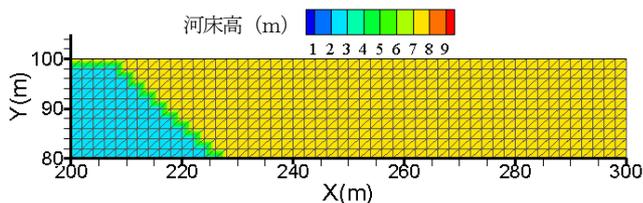


図-23 計算格子と河床高カウンター図（一部抜粋）

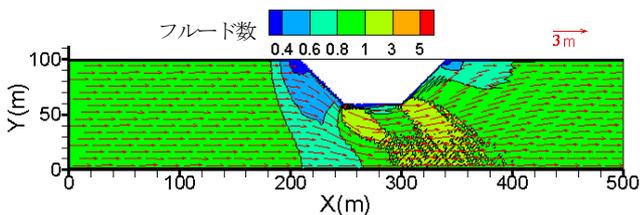


図-24 流速ベクトルフルード数カウンター図

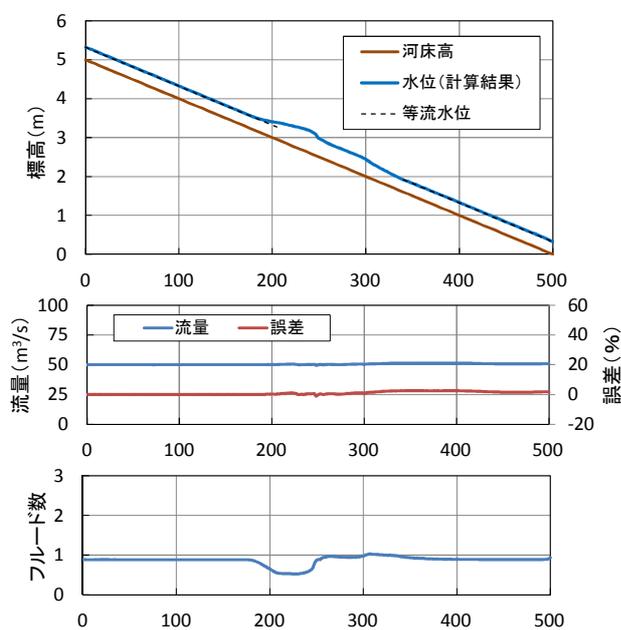


図-25 細かい計算格子の計算結果（横断平均）

ドライとウェットの境界が計算格子に沿わない場合で計算格子を細かくした場合の計算を行った。計算格子は図-23に示すように $\Delta x=2.0\text{m}$ （横断方向50分割）、急縮急拡の角度は $45^\circ$ である。図-24に流速ベクトル-フルード数カウンター図を示すが、急拡部での高流速が発生せず、滑らかな流れとなっている。また、流量は図-25に示すように流量誤差は最大で約2.6%と小さくなった。なお、この流量誤差による水位誤差は1cm程度と小さい。

## 5. おわりに

本論文では、不連続解を持つ流れの多次元解析法として開発されたCRD法において、膨張衝撃波の除去法とドライ・ウェットの境界条件について研究を行った。

平面二次元計算においては、膨張衝撃波は横断方向に拡散してその成長が抑制されるが、計算点が横断方向に一列に並び一次元的な流れとなった場合に支配断面で膨

張衝撃波が現れる<sup>1)</sup>。この除去法として流れのみの計算に流砂の連続式を加えて計算する方法<sup>9)</sup>を適用し、ダム破壊流れで膨張衝撃波が除去されることを示した。

また、ドライ・ウェットの境界条件については、境界付近にあるウェットの計算点を補正する方法(a)とドライの計算点を使用する方法(b)の2つを提案した。半円型の急縮流れの計算において、この境界条件の適合性を検討し、(a)の方法が一次元CRD法と良く一致したことを示した。ただし、(a)の方法は計算時間 $\Delta t$ ごとにドライとウェットの境界線を探索する必要があり計算時間は長くなるため、(b)の方法で精度の高い境界条件の設定が出来ないかが今後の課題である。また、境界条件(a)の方法でより厳しい急縮急拡の条件での適合性を確認した。その結果、計算格子に沿わない境界の場合は、厳しい急拡部付近では剥離が生じその下流側で流量が増加する可能性があるが、そのような場でも急縮急拡に沿った計算格子を用いる方法や細かいメッシュで計算する方法により流量誤差を小さくできることがわかった。なお、この誤差は、CRD法が不連続点では1次精度であることや急拡部で剥離が生じ非定常性が強くなっているために精度が低下して生じたと考えられる。

実河川にCRD法を適用する場合は、このようなCRD法の特性を踏まえて計算を行う必要がある。

## 参考文献

- 堀江克也, 岡村誠司, 小林雄介, 兵藤誠, 樋田祥久, 西本直史, 森明巨: CRD法を用いた常流・射流混在流れの数値解析, 水工学論文集, 第55巻, pp.1189-1194, 2011.
- 堀江克也, 森明巨, 平井康幸, 西本直史: 急勾配河川におけるCRD法の適用性, 水工学論文集, 第56巻, pp.1231-1236, 2012.
- 例えば崇田徳彦, 清水康行, 渡邊康玄: MacCormack法を用いた常・射流計算, 北海道開発局開発土木研究所月報, No.448, pp.23-32, 1990.
- H.Paillere, and H.Deconinck.: Compact Cell Vertex Schemes on Unstructured Meshes. In "Euler and Navier-Stokes Solvers Using Multi-Dimensional Upwind Schemes and Multigrid Acceleration" Edited by Herman Deconinck and Barry Koren, Vieweg, 1997
- 西本直史, 森明巨, 板倉忠興, 金澤克己: FDS法による1次元開水路流れの数値解析, 土木学会論文集, No.670/II-54, pp.25-36, 2001.
- 秋山壽一郎, 重枝未玲, 鬼束幸樹, 白川寛樹: 平面2次元数値モデルによる急流都市河川の流況解析, 水工学論文集, 第48巻, pp.631-636, 2004.
- 倉林弘志, 清水康行: 浮州の形成を考慮した網状流路における河床変動計算, 水工学論文集, 第46巻, pp.743-748, 2002.
- 重枝未玲, 秋山壽一郎, 重岡宏美: ドライ・ウェット状態となる地形起伏がある場合での氾濫流の数値シミュレーション, 水工学論文集, 第51巻, pp.781-786, 2007.
- 北海道開発局開発土木研究所, 石狩川遊水地越流部模型実験業務報告書, 1989.