土木学会論文集B1(水工学) Vol.70, No.4, I_739-I_744, 2014.

急勾配河川のドライ・ウェットの境界条件と流量誤差

A DRY-WET BOUNDARY CONDITION AND A DISCHARGE ERROR OF A STEEP GRADIENT RIVER

堀江克也[1]・森明巨[2]・西本直史[3]
Katsuya HORIE, Akio MORI, and Naoshi NISHIMOTO

[1]正会員　工修　いであ株式会社　水圏事業部河川部（〒154-8585 東京都世田谷区駒沢3-15-1）
[2]正会員　工博　いであ株式会社　水圏事業部河川部（〒060-0062 北海道札幌市中央区南二条西9-1-2）
[3]正会員　博（工）　いであ株式会社　水圏事業部（〒154-8585 東京都世田谷区駒沢3-15-1）

Authors have applied the CRD scheme to the open channel flow, and shown validity as compared with the experiment-with-a-model result or the theoretical value. However, there was a case where a flow error arose at the place where river width changes rapidly. The cause is considered to be dry-wet boundary condition. In the paper, in order to make a discharge error small in a steep gradient river, the dry-wet boundary condition was improved. The improved model was applied to the Toyohira River which is a torrent municipal river. In this calculation, as compared with the past calculation, the discharge error became small.

Key Words : *numerical computation, contour-integration-based residual distribution, steep gradient river, dry-wet boundary, discharge error*

1. はじめに

著者らは不連続解を持つ流れの多次元解析法として開発されたCRD法の研究を行っている[1), 2), 3)]．CRD法は高速空気流でその優れた機能が示されており，MacCormack法[4)]のように陽的に人工粘性を加える必要がなく，Residual Distribution (RD) scheme[5),6),7)]のように複雑な線形化を必要としない計算法である．また，平面二次元計算では有限要素法のように非構造の三角形格子を用いるので複雑な地形の扱いが容易である．これまでの研究では，水理模型実験結果やダム破壊流れなどの理論値との比較によりCRD法の基本性能を示し[1)]，急流都市河川の豊平川を対象として実河川の大規模洪水時への適合性を確認した[2)]．また，実河川の多様な場（平水位時の流れや氾濫域など）へ適用するため，CRD法の計算点（Cell-vertex）に対応したドライ・ウェットの境界条件について示した[3)]．ドライ・ウェットの境界条件として，境界付近のウェットの計算点の水理量を補正する方法を提案し，急縮急拡がある流れの適合性を確認した．しかし，急勾配（1/100）で厳しい急縮急拡の計算において，急拡部付近で剥離が生じその下流で流量が増加する場合があった．その対処法として，計算格子を境界線に合わせる方法や計算格子を細かくする方法を提案したが，実河川で容易にCRD法を適用するためには，計算格子への依存が小さく流量誤差の小さい境界条件を設定する必要がある．そこで本研究では，急勾配河川にCRD法を適用する際のドライ・ウェットの境界条件の取り扱いと流量誤差について論じ，CRD法のモデルの向上を図る．

2. 計算法

(1) CRD法

CRD法の計算法は文献1)に示す以下の方法である．

二次元一階双曲型偏微分方程式を式(1)で表す．

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} + \Omega = 0 \tag{1}$$

ここに，ϕは保存変量，$\mathbf{F}$は流束である．ガウスの発散定理を使えば，式(1)は式(2-1)，式(2-2)に書き換えられる(簡単のため$\Omega = 0$とする)．

$$\int_A \frac{\partial \phi}{\partial t} dA + \Phi^T = 0 \tag{2-1}$$

$$\Phi^T = \int_T \nabla \cdot \mathbf{F} dA = \oint_{\partial T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{n} \tag{2-2}$$

ここに，Φ^TはResidualと呼ばれる．Aは計算点の支配面積，$\mathbf{n}$は計算領域の境界線に外向きの垂直ベクトル，Tは計算要素（ここでは三角形）を表す．Φ^Tを式(3)に示

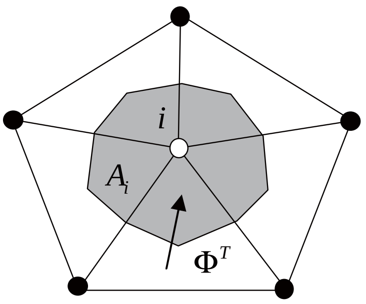
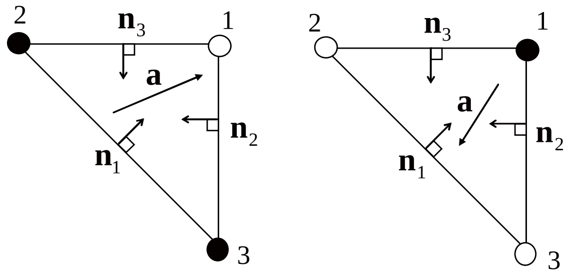


図-1　CRD法における計算点(三角形の頂点におく)



(a) 点1に配分する　　(b) 点2,3に配分する

図-2 Residualの配分法−波動の伝播する $\mathbf{a}$ の方向に配分

す係数 β_i^T に応じて，計算点 i へ配分する．

$$\phi_i^{n+1}=\phi_i^n-\frac{\Delta t}{A_i}\beta_i^T\Phi^T \qquad (3)$$

ここに，n は時間ステップ，$\sum_i \beta_i^T=1$ である．

計算には非構造の三角形格子を用いる．計算点は三角形の頂点（Cell-vertex）にとり（図-1），１つの三角形格子（計算要素）ごとに独立してResidual Φ^T を計算する．

式(2-1)に左固有ベクトル L を作用させて固有ベクトル空間に変換し，$L\Phi^T$ をInflow parameter $k_i=\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}_i/2$ の符号が正の方向に配分する(風上スキーム)．ここに，$\mathbf{a}$ は波動の伝播速度，$\mathbf{n}_i$ は辺に垂直で計算要素に内向きのベクトルである．図-2(a)のように k_i >0が1点の場合は点1に配分する．(b)のように2点に向かう場合には多くの方法が提案されているが，本論文では k_i の比に応じて配分する(4)式の方法を用いる．得られた配分に右固有ベクトル R を作用させて元の空間に戻し，Δt 後の保存変量 ϕ を算定する．

$$\text{LDA-scheme}^{5)}\ \begin{cases}\beta_2=k_2/(k_2+k_3)\\ \beta_3=k_3/(k_2+k_3)\end{cases} \qquad (4)$$

(2) 基礎方程式

平面二次元浅水流方程式は(1)式において，

$$\phi=\begin{pmatrix}h\\ q_u\\ q_v\end{pmatrix},\mathbf{F}=\begin{pmatrix}h\mathbf{v}\\ q_u\mathbf{v}+g[h]H\mathbf{i}\\ q_v\mathbf{v}+g[h]H\mathbf{j}\end{pmatrix},\Omega=\begin{pmatrix}0\\ fq_u\\ fq_v\end{pmatrix} \qquad (5)$$

ここに，h は水深，$\mathbf{v}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}$，$u,v$ は x,y 方向の水深平均流速，$\mathbf{i},\mathbf{j}$ は x,y 方向の単位ベクトル，$q_u=uh$，$q_v=vh$，g は重力加速度，H は水位，$f=gn^2q/h^{7/3}$，

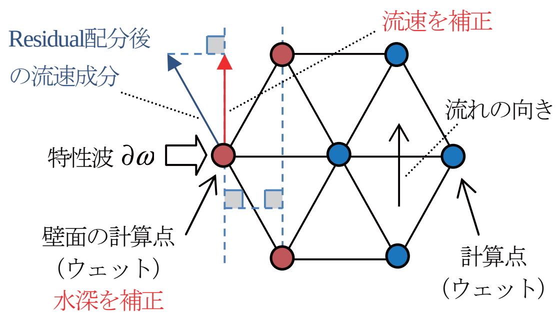


図-3 力学的な壁面条件（平面図）

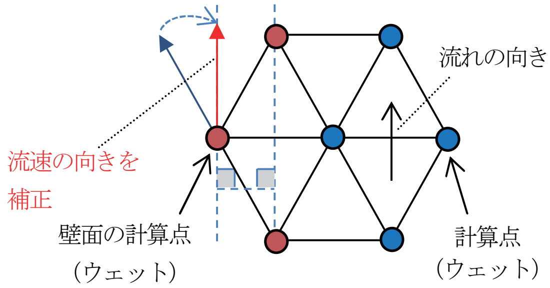


図-4 運動学的な壁面条件（平面図）

n はマニングの粗度係数，q は単位幅流量である．なお，[ ]は計算要素の平均を表し定数として扱う．

(3) 抵抗項の取り扱い

水深がゼロに近く流速が速い場合，式(5)の抵抗項が非物理的な値となるため，Δt 後の保存変量 ϕ^{n+1} を算出する際に式(6)に示すように抵抗項を陰的に取り扱う．

$$\begin{pmatrix}h\\ (1+f\Delta t)q_u\\ (1+f\Delta t)q_v\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}h\\ q_u\\ q_v\end{pmatrix}^{n}-\frac{\Delta t}{A_i}\beta_i^T\Phi^T \qquad (6)$$

(4) 上下流端

上流端及び下流端においては所定の境界値となるように式(7)により計算領域外から特性波 $\partial\omega$ を与える．

$$\partial\phi=R\partial\omega \qquad (7)$$

3．壁面条件と誤差

(1) 壁面条件

従来の壁面条件[3]は，壁面の計算点において計算領域外へ向かう流速成分がゼロとなるように，式(7)により計算領域外から特性波 $\partial\omega$ を与える方法であり力学的条件である（図-3）．上下流端の境界条件にも用いている．しかし，計算領域外に向かう流速成分に対応した水深を補正するため，計算領域内の水のボリュームが増加する．流れに対して壁面が並行に近い場合はこの誤差は小さいが，壁面に向かう流れが何度も発生する場合はこの誤差は無視できない．このため，図-4に示すように力学的ではないが流速の向きを壁面に沿う向きに補正し，流速の大きさと水深は補正せずに運動量を保存させる方法（運動学的条件）を用いる．この方法により貯水量の誤差が改善されることを以下に示す．

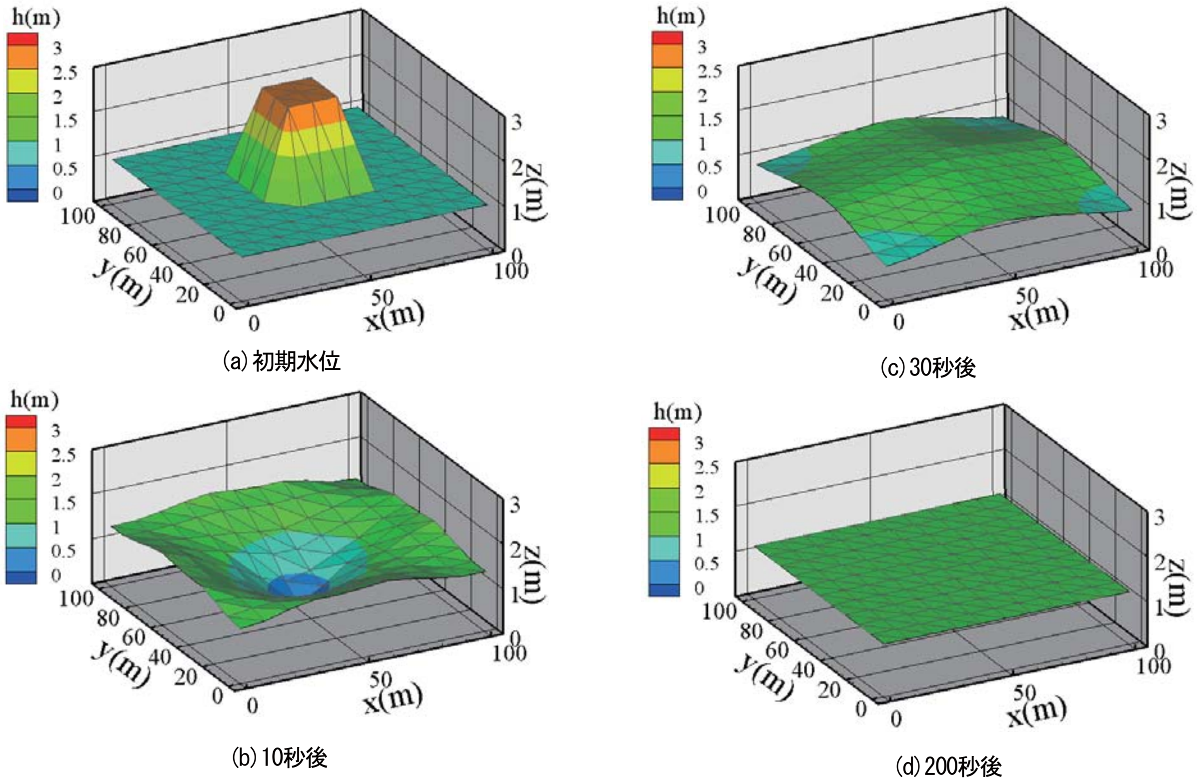


図-5　水柱崩壊の数値計算結果（運動学的条件）

(2) 水柱崩壊の数値計算

壁面条件の改良の効果を二次元水柱崩壊の数値計算により確認する．貯水槽の大きさは縦横100.0mとし，計算格子は$\Delta x = \Delta y$ =10.0m，頂角90°の二等辺三角形としている． 初期水位は貯水位が1.0m，水柱が中央に2.0m×20.0m×20.0mで存在する．運動学的条件による計算結果を**図-5**に示す．水柱の崩壊により水面の波が生じて200秒程度で水面の波は収束するが，その間に壁面へ向かう流れが何度か繰り返し起こる．計算初期の貯水量に対する誤差の時間変化を**図-6**に示す．力学的条件では貯水量に約8%の誤差が生じるが運動学的条件では誤差はゼロである．力学的条件では壁面に向かう流速を水位に変換するため，波が収束するまで徐々に貯水量が増加するが，運動学的条件では流速の向きのみを変更するため貯水量は保存される．

(3) 計算水位の妥当性確認

運動学的条件による計算水位の妥当性を確認するため，川幅と河床勾配の変化が著しい山地河川を想定した岡部ら[8]の水路模型実験との比較を行った．計算格子はΔx =12.5cm，粗度係数は0.02とし，下流端水位を5.8cmとして定常解を求めた．上流端流量は6.0l/sである．常射流混在流れであるため，河床変動計算を利用したEntropy Fix[3]を使用した．**図-7**に水路中心線上で計測された実験水位と運動学的条件による平面二次元計算の断面平均水位を示す．力学的条件による計算は文献1）で行われ，実験水位を良く再現しているが，運動学的条件においても実験水位を良く再現できる．計算領域内の質量誤差（流入量 - 流出量－貯水量）の時間変化を**図-8**に示すが，力学的条件と運動学的条件の質量誤差は共に1%以内で

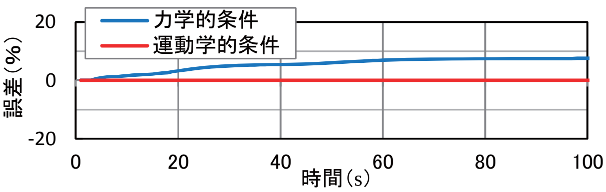


図-6　貯水量の誤差の時間変化

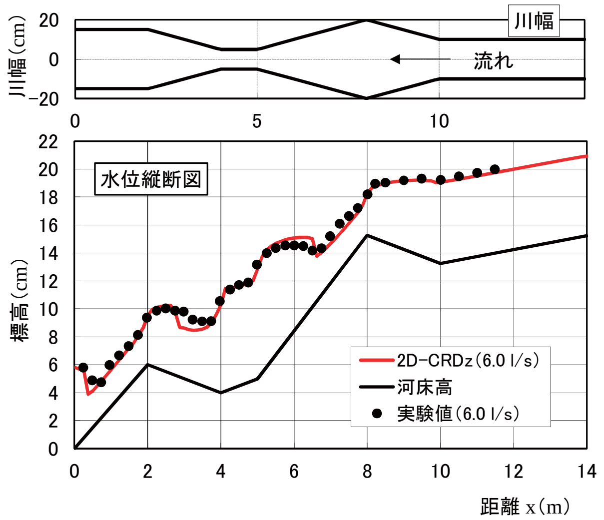


図-7　計算水位（運動学的条件）

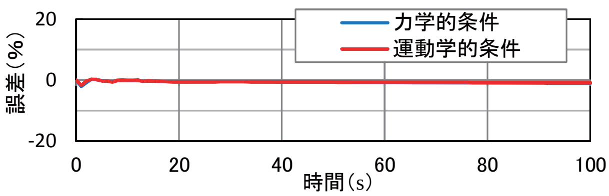


図-8　質量誤差の時間変化（計算領域内）

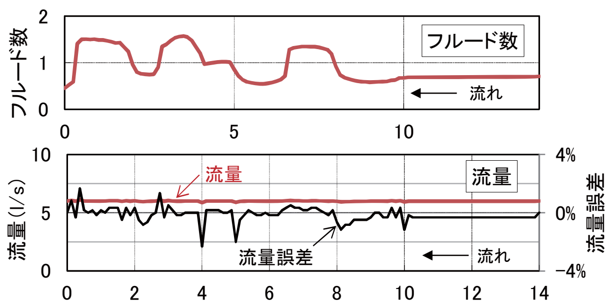


図-9　フルード数と流量誤差（運動学的条件）

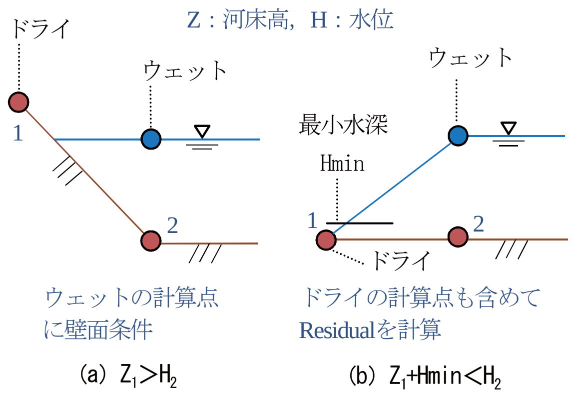


図-10 ドライとウェットの境界条件（断面図）

あり小さい．**図-9**にフルード数と流量縦断図（断面平均値）を示す．流量は急拡急縮部，河床勾配の変化点などで若干誤差が生じているが，最大で2.3％程度と小さく，その下流では戻っている．

4．ドライとウェットの境界条件と誤差

(1) ドライの計算点より水位が低い場合

図-10(a)のように，ウェットの計算点の水位がドライの計算点の水位より低い場合，水際のウェットの計算点に上記3.の壁面条件を適用する．なお，計算時間Δtごとにドライとウェットの境界線の探索が必要である．文献3）では，この方法と同様にウェットの計算点を補正する方法を提案したが，力学的条件で補正をしており，急縮急拡が厳しい計算では流量が増加する場合があった．そこで，本研究では文献3）で流量誤差が生じた急縮急拡が厳しい計算を行い，運動学的条件による改善効果を確認する．ドライとウェットの境界が計算格子に沿わないモデル河道である．河床勾配1/100の直線水路で計算格子はΔx=10.0m，x=210～330mに水路より5.0m高い階段型の高地がある（**図-11**）．粗度係数は0.030である．初期水位は急縮部が無い場合の等流水位とし，上流端から50m^3/sの一定流量を与えた．**図-12**に流速ベクトル-フルード数コンター図を示す．階段型の水際であるが，両者ともにドライとウェットの境界に沿って流速ベクトルが向いており境界条件の効果が見てとれる．力学的条件では急拡部の(x，y)=(320，50)付近で剥離が生じFr>5の高流速が生じていたが，運動学的条件では見られない．**図-13**に計算水位，フルード数と流量誤差，**図-14**に質量誤差の時間変化を示す．力学的条件では急拡部で流量が

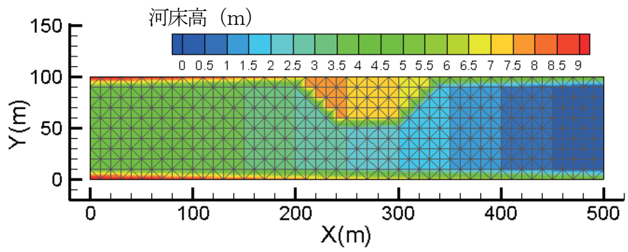


図-11　計算格子と河床高コンター図

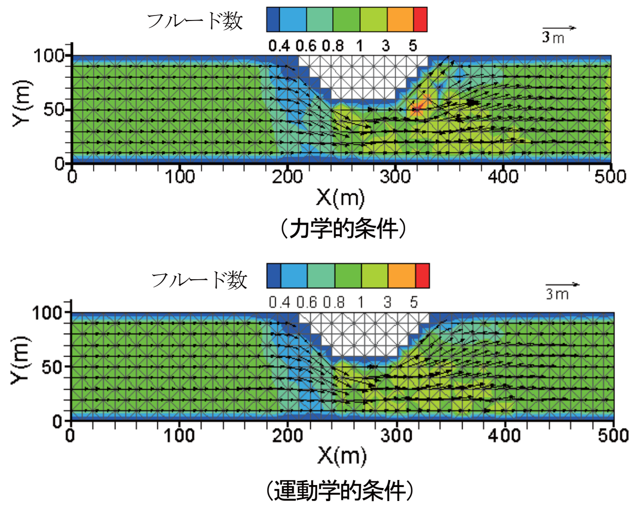


図-12　流速ベクトル-フルード数コンター図

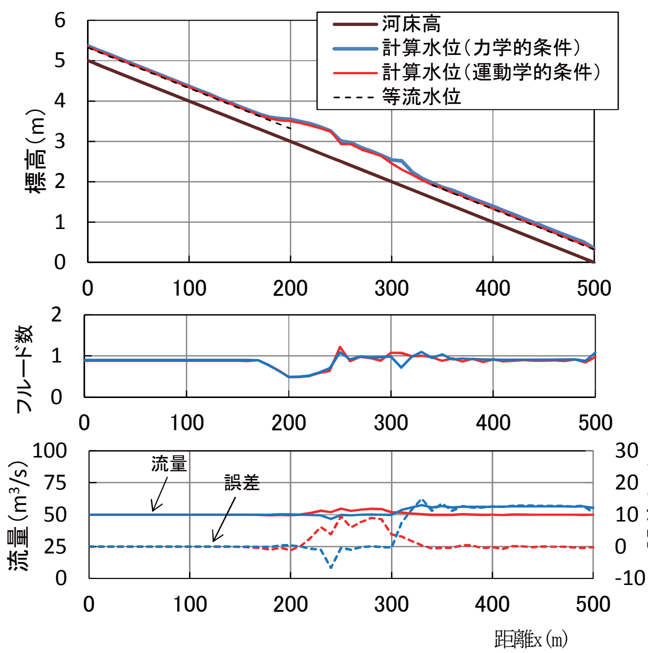


図-13　計算水位，フルード数と流量誤差

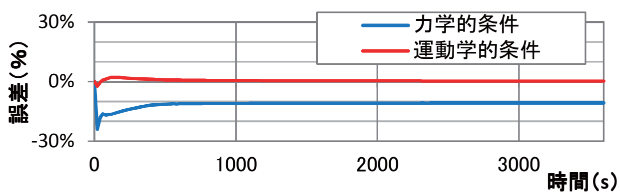
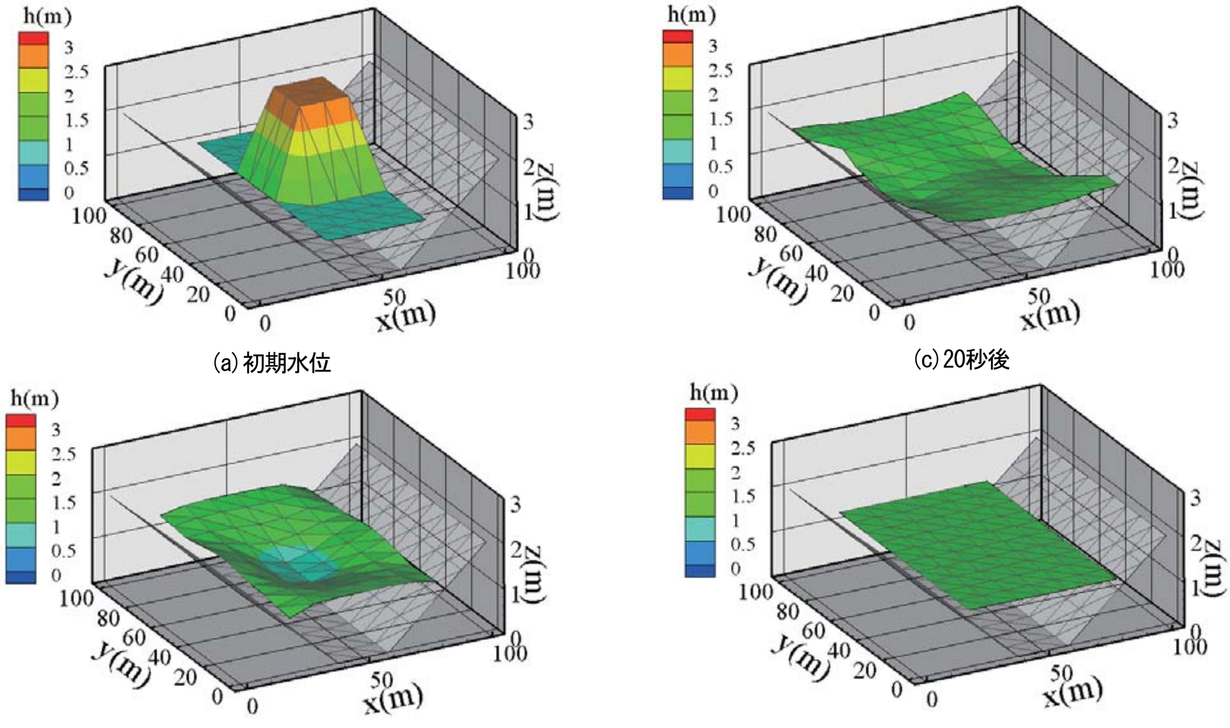


図-14　質量誤差の時間変化（計算領域内）

最大約15％増加し，水位も等流水位よりやや高くなっていたが，運動学的条件では急拡部下流の流量増加はなく誤差は0.2％程度である．境界に沿わない計算格子や計



(a) 初期水位　(c) 20秒後

(b) 10秒後　(d) 100秒後

図-15　水柱崩壊の数値計算結果

算格子を細かくしなくても運動学的条件により流量誤差・質量誤差が小さくなる．なお，急縮部で最大約9.5%の流量誤差が生じているが，この原因は本解析法が時間1次精度であり急縮部では非定常性が強く精度低下が生じていると考えられる．

(2) ドライの計算点より水位が高い場合

図-10 (b) のように，ドライの河床高よりウェットの水位が高い場合，ドライの計算点も含めてResidualを計算する．一般にドライベッドの計算点には最小水深を与えて計算を行う[9]が，貯水量の誤差を可能な限り少なくするため，最小水深は与えずに計算を行う．三角形要素の1点がドライで，他の2点の水位と比較して**図-10 (b)** の Z_1+Hmin＜H_2が成立する時にResidualを計算する．Hminは計算開始の判断水深であり，Residualを配分後にドライの水深がHminに到達しない場合でも水深をゼロとしない．Hminはドライの計算点の地被状況に応じて適切に与える．なお，水位低下時に水深がHmin以下となる場合は流速をゼロ，水位が河床高以下となった場合は，流速，水深ともにゼロとする．

二次元水柱崩壊の数値計算により計算法の確認を行う．貯水槽の大きさと計算格子は3.(2)と同様とし，x =40m, 60mから左右の壁に向かって勾配1/20の河床が存在する．初期水位は貯水位が1.0m，水柱が中央に2.0m×20.0m×20.0mで存在し，瞬時に崩壊するものとする．なお，Hmin=0.0001mとした．計算結果の水位を**図-15**に示す．水柱崩壊後の10秒後，20秒後にドライの河床に水面の波が駆け上がり，100秒程度で収束する．このときの計算初期の貯水量に対する誤差の時間変化は約0.08%である（**図-16**）．誤差が大きい時間帯は，計算開始から15秒から24秒間であり，ウェットからドライに移行する引き波が発生している（y =50m付近）．引き波時に河床から水の脇出しが生じ貯水量が増加しているようである．計算初期から14秒後までは押し波となっているが，最大の貯水量の誤差は約0.004%であり微小である．

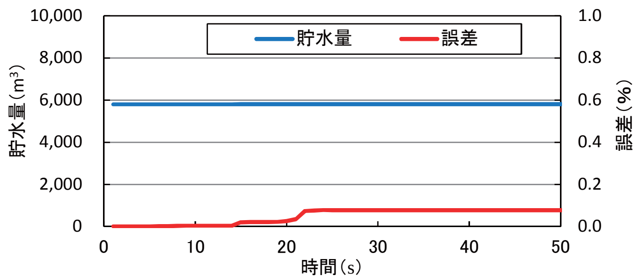


図-16　貯水量の時間変化と誤差

5．実河川への適用

壁面条件とドライ・ウェットの境界条件を改良したモデルで，急流都市河川である豊平川へ適用した．計算条件は文献2）と同様とし，昭和56年9月横断測量の地形を用いて，昭和56年8月洪水ピーク流量（1,417m^3/s）を流下させた．計算結果の水位縦断図（断面平均値），流量縦断図を**図-17**に示す．　1号床止～6,7号床止下流で支配断面から跳水が発生しているが，その周辺で流量が変動している．力学的条件では5号床止周辺で増加した流量がその下流まで影響し，下流側の水位が高くなっているが，運動学的条件では床止下流で流量が若干変動するがその下流までは影響せず，流量誤差は最大約4%に収まっている．模型実験の結果と同様に床止下流の高水敷でドライベッドが発生しており，運動学的条件を用いることで流量誤差が小さくなったと考えられる．

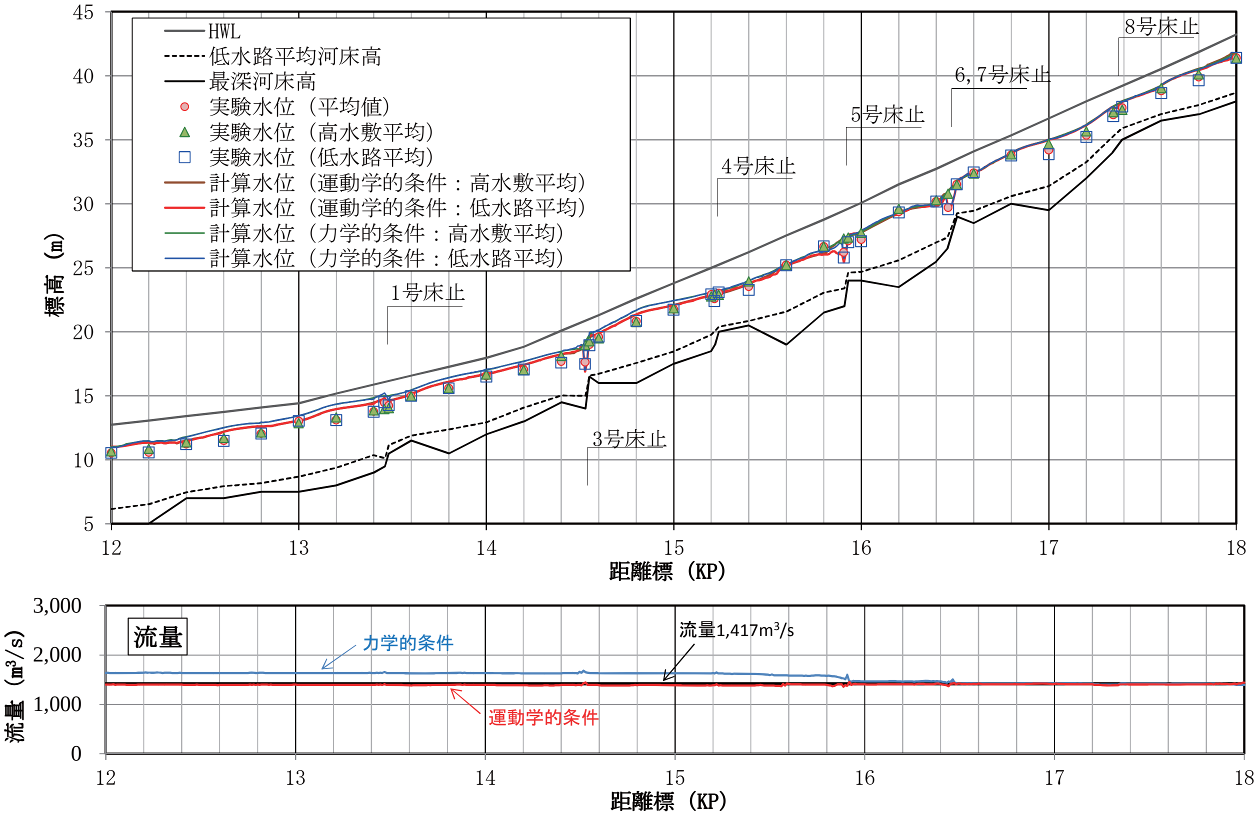


図-17　昭和56年8月洪水ピーク流量を対象とした計算水位と計算流量

6．おわりに

本論文では，不連続解を持つ流れの多次元解析法として開発されたCRD法において，ドライ・ウェットの境界条件の取り扱いと流量誤差について論じ，急勾配河川でも誤差が小さいモデルへと向上を図った．

第一に壁面条件の見直しを行った．従来の力学的条件[3]では壁面の計算点において流速成分と水深を補正するため，計算領域外に向かう流速成分に対する貯水量が増加する．この誤差は平滑域の洪水流の計算においては微小であるが，急勾配河川で高流速の場合は誤差が大きくなる．このため運動量が釣り合うように流速のみを補正する方法（運動学的条件）を適用し，水柱崩壊の計算や既往の実験水位[8]と比較し本解析法が妥当であることを確認した．第二にドライとウェットの境界条件について，ドライの河床高がウェットの水位より低ければ計算を行い，高ければ上記の壁面条件を適用する方法とした．これらを修正したモデルを豊平川の昭和56年8月洪水流に適用し，急勾配で床止が連続する実河川においても流量誤差が小さい計算が可能となった．

参考文献

1) 堀江克也，岡村誠司，小林雄介，兵藤誠，樋田祥久，西本直史，森明巨: CRD法を用いた常流・射流混在流れの数値解析，水工学論文集，第55巻, pp.1189-1194, 2011.
2) 堀江克也，森明巨，平井康幸，西本直史: 急勾配河川におけるCRD法の適用性，水工学論文集，第56巻, pp.1231-1236, 2012.
3) 堀江克也，森明巨，西本直史: 急勾配河川にCRD法を適用する場合のドライ・ウェットの境界条件と流量誤差，水工学論文集，第57巻, pp.I_649-I_654, 2013.
4) 例えば崇田徳彦，清水康行，渡邊康玄: MacCormack法を用いた常・射流計算，北海道開発局開発土木研究所月報，No.448, pp.23-32, 1990.
5) H.Paillere, and H.Deconinck.: Compact Cell Vertex Schemes on Unstructured Meshes. In “Euler and Navier-Stokes Solvers Using Multi-Dimensional Upwind Schemes and Multigrid Acceleration” Edited by Herman Deconinck and Barry Koren, Vieweg, 1997
6) 西本直史，森明巨，板倉忠興，金澤克己: FDS法による1次元開水路流れの数値解析，土木学会論文集，No.670/Ⅱ-54, pp.25-36, 2001.
7) 秋山壽一郎，重枝未玲，鬼束幸樹，白川寛樹: 平面２次元数値モデルによる急流都市河川の流況解析，水工学論文集，第48巻, pp.631-636, 2004.
8) 岡部健士，天羽誠二，石垣昌邦: 常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算法について，水工学論文集，第36巻，pp.337-342, 1992.
9) 例えば秋山壽一郎，重枝未玲,浦勝: 非構造格子を用いた有限堆積法に基づく1次および2次精度平面2次元洪水流数値モデル，土木学会論文集, No.705/Ⅱ-59, pp.31-43,　2002.
10) 北海道開発局開発土木研究所，財団法人河川環境管理財団: 平成2年度豊平川大型水理模型実験業務報告書，1990.

（2013. 9. 30受付）